2-stündige Ergänzungsvorlesung im Wintersemester 2016/2017

D-moduln und Distributionen.

D. van Straten

Mittwochs, 10-12 Uhr,Raum 04-426

D-moduln sind Moduln über den nicht-kommutativen Ring

$$D = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$$

der partielle Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten. Die relativ junge Theorie spielt eine wichtige Rolle in der algebraische Geometrie von Perioden-Integralen.

Distributionen oder verallgemeinerte Funktionen wurden systematisch in Anwendungsbereichen durch Heaviside, Dirac und anderen benutzt, noch bevor durch Sobolev und Schwarz die heute gängige Definition als Funktional auf einem Raum von Testfunktionen eingeführt und zu einer den wichtigsten Werkzeuge der Analysis wurden.

Aus der klassische Elektrostatik ist bekannt, dass das elektrostatische Potential einer Einheits-Punktladung beschrieben wird durch die Funktion

$$E(x, y, z) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Es erfüllt die partielle Differentialgleichung:

$$\Delta E := \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big) E = \delta(x, y, z),$$

wobei δ die Diracsche Delta-Funktion ist.
Das Potential $\Phi = \Phi(x, y, z)$, welches durch eine Ladungsverteilung $\rho = \rho(x, y, z)$ erzeugt wird, erfüllt die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\Phi = \rho$$

und lässt sich als Faltung mit E darstellen:

$$\Phi(x,y,z) = \int \rho(u,v,w)E(x-u,y-v,z-w)dudvdw.$$

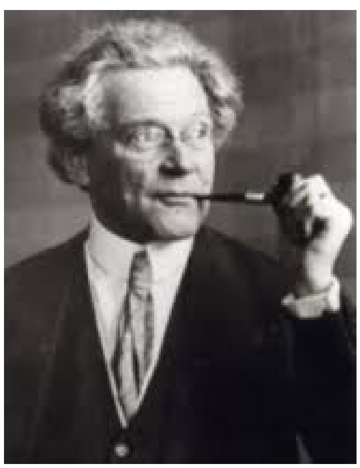
Ist allgemein

$$P = P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$$

eine partielle Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so nennt man eine Distribution E mit der Eigenschaft

$$PE = \delta$$

eine *Fundamentallösung von* oder *Greensche Funktion* P. Wie vorher lassen sich dann Lösungen von $P\Phi = \rho$ mittels Faltung mit so einer Fundamentallösung darstellen.
Solche Fundamentallösungen wurden für spezielle Operatoren P von Herglotz, Fredholm, Gelfand, Shilov und anderen konstruiert und untersucht.

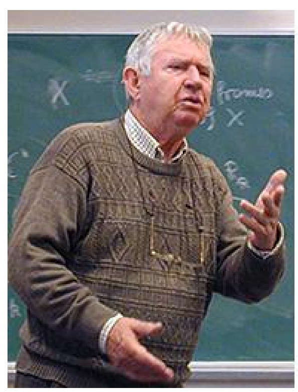


Gustav Herglotz (1881-1953) Ivar Fredholm (1866-1927)

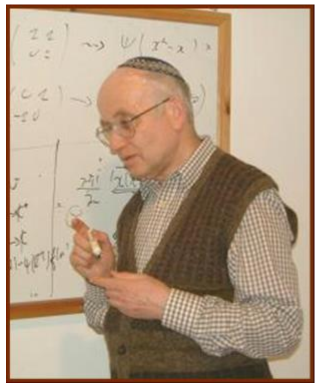
Israel Gelfand (1913-2009) Georgi Shilov (1917-1975)

Das Theorem von Ehrenpreis-Malgrange stellt die Existenz einer Fundamentallösung als Distribution für beliebige P sicher.

Leon Ehrenpreis (1930-2010) Bernard Malgrange (1928-)

J. Bernstein hat auf rein algebraische Weise gezeigt, dass immer Fundamentallösungen mit starken analytischen Zusatzeigenschaften existieren. Er entwickelte dazu eine rein algebraische Theorie über lineare partielle Differentialgleichungen, die *Theorie der D-moduln.* Diese Theorie hat inzwischen viele Anwendungen gefunden und gehört zum Standardvokabular der algebraischen Geometrie, wo Perioden-Integrale, Gauß-Manin Systeme und Picard-Fuchs Differentialgleichungen eine Rolle spielen.



Joseph Bernstein (1945-)

In der Vorlesung werden wir die Theorie der D-moduln und Distributionen entwickeln, um den Satz von Bernstein zu beweisen.

Themen der Vorlesung:

- Theorie der Distribution.
- Fouriertransformation.
- Fundamentallösungen.
- Gelfand-Shilov Formel.
- Weyl-algebra als filtrierter noetherscher Ring.
- Systeme von partiellen Differentialgleichungen als Moduln über Weyl-algebra.
- Filtrierungen und Charakteristische Varietät.
- Ungleichung von Bernstein.
- Holonome D-moduln.

- Existenz der b-Funktion.
- Analytische Fortsetzung von P^λ.
- Distributionen der Bernsteinklasse.

Vorkenntnisse:

Kenntnisse der Grundvorlesungen und der Funktionentheorie wird vorausgesetzt. Algebraische Kenntnisse über die Idealtheorie des Polynomrings wie etwa aus der Computeralgebra oder Algebra II sind von Vorteil, aber nicht zwingend notwendig, da alles von Grund auf entwickelt werden muss, da der Ring der Differentialoperatoren nicht kommutativ ist. Kenntnisse über Funktionalanalysis, Distributionen und partielle Differentialgleichungen sind von Vorteil, aber auch nicht zwingend notwendig, da der Hauptakzent auf der algebraischen Entwicklung der Theorie liegt.

Literatur:

J. Bernstein: Modules over the ring of differential operators; the study of fundamental solutions of equations with constant coefficients. Functional Analysis and its Applications 5, No.2, 1-16 (1971).

J.-E. Björk: *Rings of Differential operators*, North Holland Mathematical Library Vol. 21, North-Holland Publishing Company Amsterdam-Oxford-New York, 1979.

S. C. Coutinho: *A primer of Algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts Vol. **33**, Cambridge Univerity Press, Cambridge 1995.

F. Pham: *Singularités des systémes diférentielles de Gauss Manin, Progress in Mathematics* **2**, *Birkhäuser (1979).*

G. E. Shilov: Generalized Functions and Partial Differential equations, *Mathematics and its Applications, Vol.* **7**, *Gordon and Breach, New York-*

London-Paris.